CAPITOLO II

CIRCUITI ELETTRICI

INDICE

Circuiti elettrici

In un circuito elettrico gli elettroni fluiscono all'esterno della sorgente di potenziale (generatore di tensione), dal polo negativo al polo positivo, invece all'interno del generatore agiscono forze che trasportano cariche positive verso il polo positivo e cariche negative verso il polo negativo, in opposizione alla repulsione elettrica tra le cariche stesse, al fine di ripristinare la differenza di potenziale iniziale ai capi del generatore stesso.

Questo processo, opposto alle forze del campo, necessità di energia, ovvero per trasportare al proprio morsetto una carica q bisogna compiere lavoro L. È allora utile definire una grandezza fisica che sia indipendente dalla carica elettrica q. Essa indica il lavoro compiuto per unità di carica elettrica. Questa grandezza è la **forza elettromotrice del generatore** (f.e.m.) ed è qui indicata con la lettera f:

$$f = \frac{L}{q}$$

L'unità di misura della f.e.m. è la stesa della tensione V; infatti:

$$f \text{ in } \quad \frac{joule}{coulomb} = volt$$

La forza elettromotrice ha la stessa intensità della differenza di potenziale ai capi dei morsetti, quando il circuito è aperto e non circola corrente.

In realtà la forza elettromotrice è la massima differenza di potenziale che un generatore di tensione può offrire.

A circuito chiuso, quando scorre corrente elettrica, la differenza di potenziale ai capi dei morsetti è leggermente minore della forza elettromotrice, poiché parte dell'energia elettrica fornita dal generatore stesso è usata per muovere le cariche al suo interno.

Per stimare questa caduta di tensione, dovuta a parametri costruttivi del generatore, si introduce la **resistenza interna del generatore** R_i.

Questa e la resistenza esterna o resistenza di carico R_c determinano la corrente; se applichiamo la legge di Ohm all'intero circuito:

.

$$I = \frac{f}{R_i + R_c} \qquad \text{con} \qquad I = \text{intensità di corrente}$$

f = forza elettro-motrice

R_i = resistenza interna

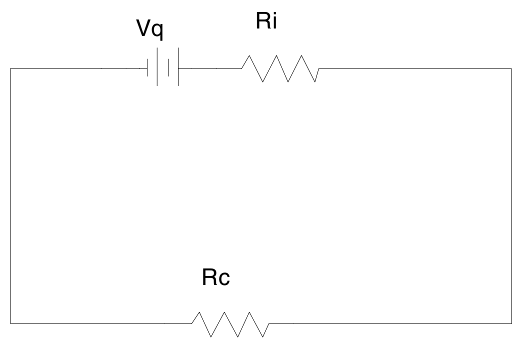
R_c = resistenza di carico

Questa è la **legge di Ohm generalizzata;** tale legge è di enorme importanza in quanto mette in relazione la f.e.m. del generatore con la d.d.p. ai capi del carico e con la d.d.p. all'interno del generatore.

Attenzione:

- quando la resistenza di carico R_c tende a zero, la corrente risulta determinata dalla piccola resistenza R_i, che deve essere presente per questioni di sicurezza, cioè per evitare danni (corto circuito, quando la resistenza è troppo piccola, la corrente diventa enorme).

Circuito elettrico con resistenza interna R_i



In un circuito di corrente completo, bisogna distinguere fra le seguenti tensioni:

- tensione della sorgente V_q che corrisponde a f la f.e.m. (forza elettromotrice)
- caduta di tensione interna $V_i = R_i I$: una parte della fem della sorgente cade attraverso la resistenza interna quando il circuito è chiuso

- tensione di carico V_c : è la d.d.p. fra i poli del generatore in un circuito chiuso; tipicamente la caduta di tensione interna è più piccola della tensione di carico, inoltre si ha che la somma della caduta sul carico più quella sulla resistenza interna uguaglia la f.e.m., ossia:

La tensione di carico è uguale alla somma delle differenze di potenziale esterne

$$V_c = V_1 + V_2 + V_3 + ...$$

che segue dalla legge di Ohm per l'intero circuito

$$f = I\left(R_i + R_c\right) = V_i + V_c$$

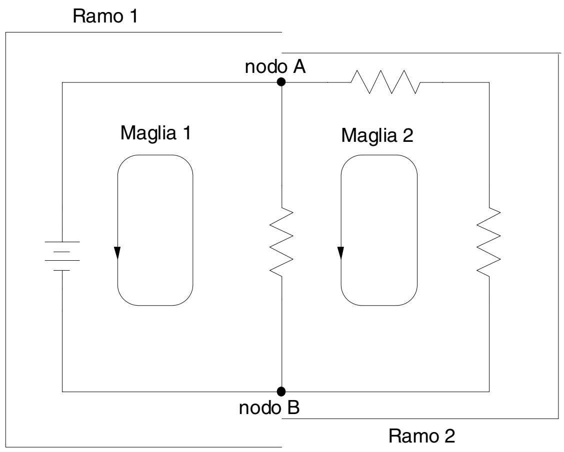
In un circuito chiuso la d.d.p. ai capi del generatore è uguale alla somma di tutte le d.d.p.

Se il circuito contiene più sorgenti di potenziale, queste devono essere addizionate algebricamente. Nel caso di posizionamento in verso opposto (poli invertiti) le tensioni considerate quindi si sottraggono. Per trovare il corretto segno delle sorgenti di potenziale in una maglia, uno comincia col porre un senso di circolazione fisso effettivo. Si ha allora

$$\sum V_q = \sum V$$

Leggi di Kirchhoff

Consideriamo un sistema composto da più conduttori percorsi da corrente e da una o più sorgenti di f.e.m. (generatori); tale sistema prende il nome di *rete* ed ogni conduttore prende il nome di *ramo della rete*, costituito da una disposizione in serie di elementi attivi (generatori) e passivi (resistenze), o, eventualmente, di un solo tipo di elemento.
I rami si incontrano in punti detti **nodi o diramazioni**. Un nodo è composto da almeno tre rami.
Una **maglia** è l'insieme di più rami della rete che formano un circuito chiuso non ulteriormente divisibile in parti chiuse.

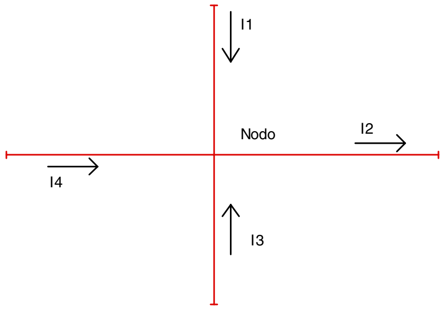


Prima legge di Kirchhoff (legge dei nodi)

La somma algebrica delle intensità di corrente nei rami facenti capo allo stesso nodo è nulla.

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k = 0$$

Siano I_1, I_2, I_3, … I_n le intensità di corrente degli *n* rami di un nodo. Queste sono considerate positive se entranti nel nodo, negative se uscenti
Per spiegare il concetto di somma algebrica, si ricorrere ad un esempio:



Le correnti entranti sono I_1, I_3 ed I_4. Nella sommatoria sono addizionate.

La corrente uscente è I_2 . Nella sommatoria è sottratta.

La prima legge di Kirchhoff è così tradotta:

$$\sum_{k=1}^{4} \mathrm{I}_k = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_2 = 0$$

La legge dei nodi è una diretta conseguenza della *legge di conservazione della carica*; infatti la quantità di carica che entra in un nodo è uguale alla quantità di carica che ne esce; in altre parole nel nodo non c'è accumulo né diminuzione di carica. Per questo motivo, in un dato intervallo di tempo Δt, la corrente entrante in un nodo deve essere uguale a quella uscente.

Seconda legge di Kirchhoff (legge delle maglie)

La somma algebrica delle f.e.m. agenti lungo i rami di una maglia è uguale alla somma algebrica dei prodotti delle intensità di corrente di ramo per le rispettive resistenze (del ramo).

$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{I}_k R_k = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

In altre parole:

In ogni maglia la somma algebrica degli incrementi di potenziale è uguale alla somma delle diminuzioni di potenziale.

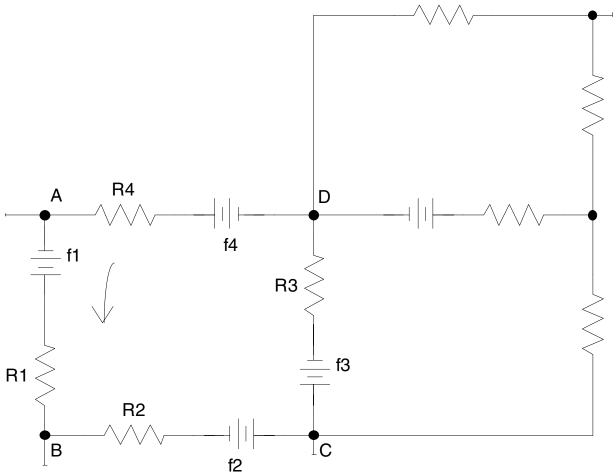
Se prendiamo un punto arbitrario X di una maglia, sia V_x il potenziale in X e immaginiamo di percorrere tutta la maglia in un senso o nell'altro e di ritornare in X, il potenziale sarà ancora V_x

e se nel percorrere le maglie si sono incontrate *n* f.e.m. la cui somma algebrica è $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{f}_k$, si dovranno incontrare anche *m* cadute di tensione $\sum_{k=1}^{m} \mathrm{I}_k R_k$, tali che la differenza con le f.e.m. si annulli.

Per spiegare la II legge di Kirchhoff, si focalizza l'attenzione su una maglia della rete e si fissa ad arbitrio una corrente di maglia con un verso di scorrimento positivo. Per ogni ramo della maglia valgono le seguenti definizioni:

- La corrente di ramo è positiva se concorde con il verso della corrente di maglia, altrimenti è negativa.
- Le forze elettro-motrici di ramo sono positive se la corrente di maglia attraversa i generatori dal polo negativo al polo positivo, altrimenti sono negative.

Esempio



Si consideri la maglia ABCD e si fissi un verso arbitrario positivo di corrente di maglia (per esempio il verso antiorario).

La II legge di Kirchhoff è:

$$f_1 + f_2 - f_3 + f_4 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4$$

È un'equazione che si può ottenere anche mettendo a sistema la legge di Ohm per i quattro rami della maglia:

$$\begin{aligned} V_A + f_1 - R_1 I_1 &= V_B \\ V_B + f_2 - R_2 I_2 &= V_C \\ V_C - f_3 - R_3 I_3 &= V_D \\ V_D + f_4 - R_4 I_4 &= V_A \end{aligned}$$

Sommando membro a membro, si ottiene l'equazione di Kirchhoff.

Osservazioni:

Quante maglie ha una rete?

Detto N il numero di nodi ed R il numero di rami della rete. Il numero di maglie è M=R-(N-1)

Come individuare il numero di maglie indipendenti?

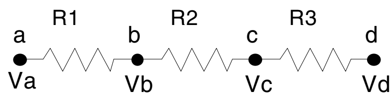
Partendo da una maglia, si individuano successivamente le altre in modo che ciascuna nuova maglia possegga almeno un ramo della rete che non fa parte delle precedenti.

Se N è il numero dei nodi, solo N-1 sono indispensabili, cioè permettono di scrivere equazioni indipendenti per le correnti.

Combinazione di resistenze

Collegamento in serie

In un collegamento di resistenze in serie o in fila, le resistenze sono collegate una dietro l'altra, ossia ciascuna di esse è attraversata dalla stessa corrente. Quando due resistenze sono attraversate dalla stessa corrente esse si dicono in serie.



In un collegamento in serie la resistenza totale equivalente è uguale alla somma delle singole resistenze:

$$Rs = R_1 + R_2 + R_3 + ...$$

Siccome ciascuna resistenza è attraversata dalla stessa corrente, segue dalla definizione di resistenza:

$$I = \frac{V_a - V_b}{R_1} = \frac{V_b - V_c}{R_2} = \frac{V_c - V_d}{R_3} = \dots$$

la caduta di potenziale ai capi del sistema di resistenze è:

$$V_a - V_d + ... = V_a - V_b + V_b - V_c + V_c - V_d + ... = I\,R_1 + I\,R_2 + I\,R_3 + ... = I\left(R_1 + R_2 + R_3 + ...\right)$$

se sostituisco le (tre) resistenze in serie con un'unica resistenza *R*s, avrò ai suoi capi una differenza di potenziale *V*s uguale alla somma delle ddp ai capi di ciascuna resistenza $Vs = V_1 + V_2 + V_3 + ...$

ed usando la legge di Ohm, $Rs\, I = Vs$, segue la regola per le resistenze in serie.

Dalla uguaglianza della corrente che traversa le resistenze in serie segue anche

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{e in generale} \quad \frac{V_i}{V_j} = \frac{R_i}{R_j}$$

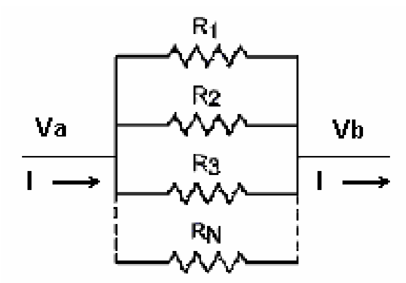
cioè in un collegamento in serie le cadute di tensione sulle resistenze si comportano come le resistenze stesse (le ddp ai capi delle resistenze stanno fra loro come le resistenze stesse).

Collegamento in parallelo

Due o più resistenze si dicono *collegate in parallelo* quando ai loro capi c'è la stessa ddp.

Dalle leggi di Ohm e di Kirchhoff segue:

in un collegamento in parallelo il reciproco (inverso) della resistenza complessiva equivalente Rp è uguale alla somma dei reciproci (inversi) delle singole resistenze.



$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$$

A differenza di quanto avviene nella combinazione di resistenze in serie, nel **collegamento in parallelo** abbiamo che:

- la ddp ai capi del sistema di resistenze è la stessa:
- la corrente si divide fra le varie resistenze.

Sia I la corrente che scorre dal punto a al punto b; nel punto a la corrente si riparte fra i 3 resistori (o più resistori): I_1 attraverso R_1, I_2 attraverso R_2, I_3 attraverso R_3…

Se applichiamo la legge di Ohm ad ogni singola resistenza avremo:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V}{R_3}$$

ma per la legge dei nodi la corrente totale è la somma delle singole correnti:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \ldots = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots\right)$$

da cui segue la regola per la combinazione di resistenze in parallelo:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$$

Nel caso particolare di due resistenze in parallelo si ha ad esempio:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \Rightarrow \quad R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Attenzione

Nel caso di resistenze in parallelo la resistenza complessiva è minore della più piccola resistenza singola..

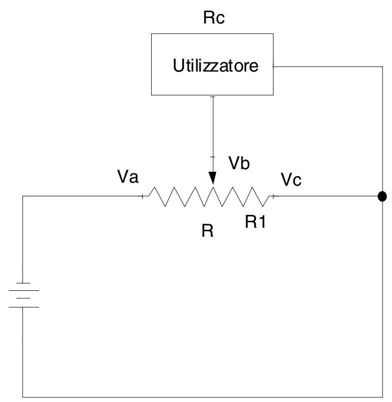
Siccome ai capi delle resistenze in parallelo si ha la stessa ddp, avremo per la legge di Ohm

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = \ldots \quad \text{ossia} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{etc.}$$

cioè in un collegamento in parallelo le correnti si comportano come l'inverso delle resistenze (le correnti stanno fra loro come l'inverso delle resistenze).

Partitore di tensione

Nel caso in cui la resistenza è sottoposta ad una tensione V può capitare di voler dividere la tensione proporzionalmente ad una parte di resistenza che si sceglie.



Se $V = V_a - V_c$ è la ddp totale sulla resistenza totale R

$V_1 = V_b - V_c$ è la ddp sulla parte di resistenza R_1

segue

$$V_1 = V \frac{R_1}{R}$$

poiché I è la stessa.

Attenzione

Questa equazione è valida esattamente solo per un partitore aperto (senza carico) ed ha una grande precisione nel caso di correnti piccole (Resistenza di carico molto grande).

$$R_{eq} = R - R_1 + \frac{R_1 R_c}{R_1 + R_c} = R - R_1 + \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_c}}$$

$$V_1 = V \frac{\dfrac{R_1}{1 + R_1 / R_c}}{R - R_1 + \dfrac{R_1}{1 + R_1 / R_c}} = V \frac{R_1}{(R - R_1)(1 + R_1 / R_c) + R_1} =$$

$$= V \frac{R_1}{R - R_1 + \dfrac{(R - R_1)R_1}{R_c} + R_1} = V \frac{R_1}{R + \dfrac{(R - R_1)R_1}{R_c}}$$

Amperometri e galvanometri

Sono strumenti che misurano l'intensità della corrente che passa in un conduttore. Il principio che li governa è lo stesso.

Sfruttano forze elettromagnetiche generate dal passaggio di corrente elettrica in una bobina rigida (di filo conduttore) al suo interno. La bobina è racchiusa tra i poli di un magnete e, quindi, immersa in un campo magnetico di forma opportuna. La coppia generata dalle forze elettromagnetiche fa ruotare la bobina di un certo angolo, finché non è equilibrata dalla coppia meccanica di un sistema armonico. Maggiore è l'angolo, maggiore è la corrente che attraversa lo strumento. L'indice del quadrante dello strumento indica l'ampiezza dell'angolo di torsione della bobina, linearmente dipendente dall'intensità della corrente da misurare.

I *galvanometri* sono amperometri destinati a misure di piccole intensità di corrente tipiche di un laboratorio. Sono più delicati, perché caratterizzati da una meccanica più fine e di precisione. Ad esempio, negli amperometri la bobina è tipicamente montata su due perni e alla sua rotazione si oppone una piccola molla. Nei galvanometri alla torsione della bobina si oppone la coppia generata dal filo a cui è sospesa.

I galvanometri più sensibili riescono a misurare intensità di corrente dell'ordine dei 10^{-12} A.

Entrambi gli strumenti devono essere attraversati da tutta l'intensità di corrente da misurare, quindi devono essere in serie agli elementi del ramo di circuito in esame.

La loro meccanica determina una resistenza interna, da sommare in serie alla resistenza del ramo di circuito, che altera il valore della intensità di corrente da misurare. In generale, a parità di sensibilità, un amperometro (o un galvanometro) è tanto migliore, quanto più è bassa la sua resistenza interna.

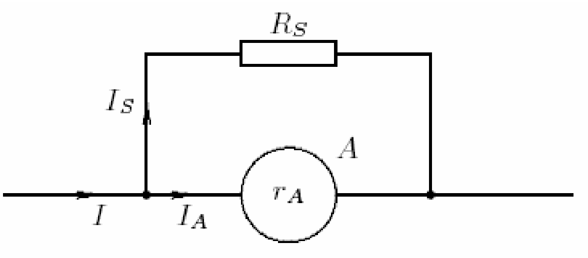
In realtà oggi giorno esistono degli strumenti universali (i tester o multimetri) che permettono di misurare l'intensità di corrente, la tensione e la resistenza;

Essi possono essere sia analogici (figura sopra) oppure digitali (figura sotto):

Le funzioni di un tester vengono selezionate mediante un commutatore, oppure utilizzando le diverse prese presenti nell'apparecchio.

Circuiti di Shunt

Il valore massimo della grandezza fisica che uno strumento di misura può ancora apprezzare, con un errore ragionevolmente piccolo, è la portata dello strumento ed è indicato dal valore di fondo scala
Se un amperometro ha fondo scala di 1A, la misura di correnti superiori, oltre che inattendibile, rischia di danneggiare irreparabilmente lo strumento.
Con opportuni accorgimenti si può "aumentare il valore di fondo scala", ovvero misurare grandezze superiori al valore massimo apprezzabile dallo strumento. Questa operazione, detta di *shunt* o *deviazione,* consiste nell'inserire resistenze opportune in parallelo allo strumento.



Sia I la corrente da misurare, con valore superiore al fondo scala dello strumento, ed I_A la corrente che attraversa realmente l'amperometro.

Per la prima legge di Kirchhoff, la corrente I_S che attraversa la resistenza R_S dello shunt vale

$$I_S = I - I_A$$

Poiché la resistenza interna dell'amperometro R_A è in parallelo con quella dello shunt, per la II seconda legge di Kirchhoff:

$$R_S(I - I_A) = r_A I_A$$

quindi:

$$I = I_A\left(1 + \frac{r_A}{R_S}\right)$$

Noto il rapporto tra la resistenza interna e quella dello shunt, la corrente incognita I è determinata indirettamente dalla misura di I_A.

Voltmetri

Misurano differenze di potenziale. Tipicamente è un amperometro (capace di misurare correnti dell'ordine dei mA o dei μA) o addirittura un galvanometro, collegato in serie con una grossa resistenza R. Se r è la resistenza interna dell'amperometro, la differenza di potenziale cercata è

$\Delta V = (r+R)\, I$

A parità di sensibilità, un voltmetro è tanto migliore quanto maggiore è la resistenza (r+R).

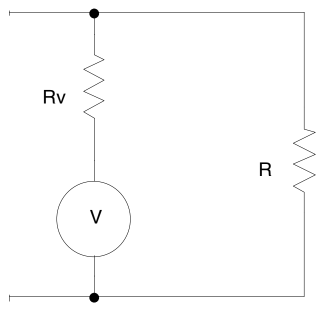
La R è necessaria perché la sola resistenza interna dello strumento, di fronte ad una elevata intensità di corrente entrante, produrrebbe forti variazioni della differenza di potenziale da misurare. Occorre allora una elevata resistenza dello strumento, ottenuta sommando in serie R+r, affinché lo strumento sia attraversato da una piccola intensità di corrente, tale inoltre da non alterare l'equilibrio ohmico del circuito.

Questo si traduce nel fatto che un voltmetro deve essere collegato in parallelo al circuito tra i due punti di cui si vuole la misura della differenza di potenziale.

Osservazione

Dovendo misurare cadute di tensioni ai capi della resistenza R, la presenza dell'apparecchio di misura influenza il circuito, abbassando un po' la tensione, a meno che il voltmetro abbia in serie (oppure internamente) una resistenza infinita.

Ad esempio consideriamo il circuito in figura:



Se

R_V è la resistenza necessaria per la misura

r la resistenza interna

V_V la caduta di tensione ai capi della resistenza R_V

V_1 l'intervallo di misura senza resistenza in serie R_V, ovvero la caduta di tensione ai capi del voltmetro

V_2 l'intervallo di misura desiderato: $V_2 = V_V + V_1$,

allora, poiché la resistenza in serie R_V e l'apparecchio di misura sono attraversati dalla stessa corrente, segue:

$$I = \frac{V_1}{r} = \frac{V_V}{R_V} = \frac{V_2 - V_1}{R_V}$$

e quindi:

$$R_V = r\left(\frac{V_2}{V_1 - 1}\right)$$

Lavoro e potenza elettrica

L'energia elettrica è una delle più diffuse e utilizzate forme di energia. L'energia elettrica è generata da un altro tipo di energia, ad es. termica (combustibili vari), potenziale meccanica (idrica), energia cinetica e pressione (eolica), lavoro meccanico, chimica, solare, fissione nucleare e (forse un giorno) fusione nucleare. Essa si lascia trasformare a sua volta in un altro tipo di energia. Anche per le trasformazioni che producono o consumano l'energia elettrica vale il principio di conservazione dell'energia. Si noti che l'efficienza di trasformazione di un tipo di energia in un altro è in molti casi lontana dall'unità.

Analizziamo ora l'energia necessaria per mantenere il moto delle cariche in un circuito elettrico, cioè attraverso una resistenza. Le cariche si muovono all'interno di un conduttore sotto l'azione di un campo elettrico; in effetti tale campo elettrico accelera gli elettroni liberi per un breve periodo aumentando la loro energia cinetica; ma gli elettroni non si muovono liberamente ma urtano varie volte contro gli ioni del reticolo cristallino del conduttore. In questo modo l'energia assorbita dal campo elettrico si trasforma in energia termica del conduttore. In altre parole:

un filo conduttore percorso da corrente si riscalda.

Siano L il lavoro elettrico (lavoro del campo elettrico, fornito dalla batteria),

V la tensione ai capi della resistenza R,

I l'intensità di corrente,

t la durata temporale considerata del flusso di corrente (intervallo di tempo),

q la carica trasportata durante il tempo t.

Allora, per il trasporto di una quantità di carica $q = I\ t$ attraverso una sezione qualsiasi del conduttore c'è bisogno di un lavoro $L = q\ V$ da cui segue che:

$$L = V\,I\,t = \frac{V^2}{R}t = I^2 R\,t$$

La quantità di lavoro eseguito nell'unità di tempo è la **potenza** $P = L / t$;

quindi dividendo per t si ottiene:

$$P = I\,V \qquad P = I^2 R \qquad P = \frac{V^2}{R}$$

Attenzione

La semplice relazione precedente per il lavoro è valida solo se l'intensità di corrente è costante nel tempo. Quindi vuol dire che i portatori di carica si muovono con velocità (mediamente) costante (velocità di deriva). Il lavoro elettrico totale sarà quindi trasformato integralmente in calore (calore elettrico, calore Joule), visto che non c'è variazione di energia cinetica delle cariche in movimento. Si assume inoltre che il calore Joule prodotto sia rimosso continuamente per evitare l'aumento di temperatura della resistenza ed il conseguente aumento di resistività.

Unità del SI: L in joule (J)

P in watt (W)

Trasformazioni di unità lavoro-energia e potenza

Lavoro	1 J = Kg m^2 s^{-2}	1 J = 1 V·A·s	1 J = 1 (V^2 / Ω)·s	1 J = A^2·Ω·s
Potenza		1 W = 1 V·A	1 W = 1 (V^2 / Ω)	1 J = A^2·Ω

Inoltre abbiamo il kWh:

1 kWh = 10^3 W·1h = 10^3 W·3600 s = $3.6 \cdot 10^6$ J

1 J = $2.777 \cdot 10^{-7}$ kWh

.

Esperienza di Joule

Joule fece passare un filo conduttore in un recipiente contenete acqua, isolato termicamente dall'ambiente esterno. Misurò la differenza di potenziale e l'intensità di corrente per un determinato intervallo di tempo, ottenendo la quantità di energia elettrica trasformata in energia interna dell'acqua.
Dalla misurazione della variazione di temperatura dell'acqua, determinò che per innalzare di un grado la temperatura di un chilogrammo di acqua erano necessari 4186 J. Quindi 1kcal = 4186 J

La quantità di energia elettrica, espressa in termini di lavoro è, come abbiamo visto prima:

$$L = I\,V\Delta t = qV = I^2 R\,\Delta t$$

Volendo esprimere la quantità di energia elettrica ceduta all'acqua in calorie *Q*, bisogna convertire il lavoro *L*, espresso in joule nel S.I., ovvero

$$Q = \frac{1}{j}L = \frac{1}{j}I^2 R\Delta t$$

j è una costante di conversione detta "**equivalete meccanico della caloria**". Sperimentalmente vale appunto

$$j = 4{,}186\frac{J}{cal}$$

Trasformazione di unità energia-calore:

1 *cal* = 4.186 *J*

1 *J* = 0.2389 *cal* [1 kcal/h = 1.153 W]

Le applicazioni pratiche basate sull'effetto Joule sono numerosissime; dalla lampadina elettrica, al forno, al ferro da stiro, etc.